

## TD1: variables complexes

### Exercice 1 (Conditions de Cauchy-Riemann)

Soit  $f$  une fonction  $\mathbb{C}$ -différentiable (= holomorphe) en  $z_0 = x_0 + iy_0$ . On rappelle que cela implique que  $f$  doit admettre la même dérivée quelle que soit la direction dont on approche  $z_0$ .

- (a) En considérant les nombres de la forme  $z = x + iy_0$  d'une part et  $z = x_0 + iy$  d'autre part, montrer que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

- (b) Montrer que cela implique que:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}(z_0) \text{ et } \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}(z_0)$$

- (c) Et enfin, que ceci est équivalent à:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0).$$

### Exercice 2

En mécanique des fluides, la force exercée par un écoulement plan irrotationnel et incompressible sur un cylindre de rayon  $R$  est donnée par l'intégrale dans le plan complexe suivante:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int \left( U_0 - \frac{R^2 U_0}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right)^2 dz,$$

où  $F_x$  et  $F_y$  sont les composantes, en coordonnées cartésiennes, de la force exercée et  $\rho$ ,  $U_0$  et  $\Gamma$  sont des paramètres réels constants.

- (a) Rappeler la valeur de l'intégrale  $\int z^n dz$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ , sur un chemin parcourant un cercle de rayon unité et centré en 0. On distinguera les cas  $n = -1$  et  $n \neq -1$ .
- (b) En déduire  $F_x - iF_y$  lorsque l'on calcule l'intégrale sur un cercle de rayon  $R$  centré en 0. Que valent alors les composantes de la force  $F_x$  et  $F_y$  ?

### Exercice 3

Calculer, à l'aide de la méthode des résidus, l'intégrale de la fonction  $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ , où  $0 < a < 1$ , pour les contours d'intégration suivants:

- (a) cercle de rayon unité centré en 0 (parcouru dans le sens direct);

- (b) contour composé du segment  $[-1,1]$  de l'axe des réels fermé par un arc de cercle supérieur de rayon unité (parcouru dans le sens direct).

Mêmes questions pour la fonction  $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2}$ .

#### Exercice 4

En utilisant les outils du plan complexe calculer la transformée de Fourier suivante:

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\mu}{\mu^2 + 4\pi^2 t^2} e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

Il faudra pour cela utiliser le lemme de Jordan et distinguer les cas  $\nu > 0$  et  $\nu < 0$  pour choisir le contour d'intégration.

#### Exercice 5

Calculons maintenant l'intégrale suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Pour cela considérez un contour d'intégration fermé dans le plan complexe composé d'un arc de cercle de rayon  $R$  centré en  $0$ , d'un arc de cercle de rayon  $\epsilon$  centré sur le pôle de la fonction, et de deux segments de droite situés sur l'axe des réels. Pensez à utiliser les Lemmes de Jordan appropriés en faisant tendre  $R$  vers l'infini et  $\epsilon$  vers  $0$  afin de calculer cette intégrale.