

TD2: distributions et convolutions**Exercice 1 (Delta de Dirac)**

(a) Pour n arbitraire, on évalue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 x^2} dx,$$

et en utilisant le rappel des intégrales Gaussiennes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{n^2}} = 1.$$

On voit donc que l'intégrale ne dépend pas de n : toutes les fonctions dans cette suite donnent le même résultat, 1!

(b) Si $x = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} = \infty$.

Si $x \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}.$$

Cette limite n'est pas bien définie (le premier facteur va vers ∞ , le deuxième vers 0), mais on peut utiliser la règle de l'Hôpital pour résoudre ça. En effet, si on remplace n par $t \in \mathbb{R}$, et qu'on traite x comme constant, on peut écrire :

$$u(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}}, \quad v(t) = e^{t^2 x^2},$$

Alors

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{dv(t)}{dt} = 2x^2 t e^{t^2 x^2}$$

et donc:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2 x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{du(t)/dt}{dv(t)/dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi} 2x^2 t e^{t^2 x^2}} = 0$$

(c)

$$\langle \lim_{n \rightarrow \infty} g_n, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \phi(x) dx$$

On utilise le changement de variables $X = xn$, donc $dX = n dx$.

$$\langle \lim_{n \rightarrow \infty} g_n, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{n\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \phi\left(\frac{X}{n}\right) dX,$$

$$\langle \lim_{n \rightarrow \infty} g_n, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \phi(0) dX = \phi(0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2} dX = \phi(0).$$

(d) Avec $h_n(x)$, les choses sont bien plus simples!

On commence par prouver que l'intégrale de $h_n(x)$ est 1 pour tout n .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x) dx = \int_{-1/2n}^{1/2n} n dx = n [x]_{-1/2n}^{1/2n} = n \left(\frac{2}{2n} \right).$$

Ensuite, si on prends la limite $n \rightarrow \infty$, il est évident que la fonction vaut zéro pour $|x| > 0$ et ∞ pour $|x| \leq 0$ soit $x = 0$.

Enfin,

$$\langle \lim_{n \rightarrow \infty} h_n, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2n}^{1/2n} n \phi(x) dx.$$

On change de variable $X = nx$, donc $dX = n dx$ et les limites d'intégrations deviennent $\pm \frac{1}{2}$:

$$\langle \lim_{n \rightarrow \infty} h_n, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} n \phi\left(\frac{X}{n}\right) \frac{dX}{n} = \int_{-1/2}^{1/2} \phi(0) dX = \phi(0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \phi(0)$$

Exercice 2

(a) Une fonctionnelle linéaire α obéit, pour deux fonctions-test ϕ, ψ et deux nombres réels a, b :

$$\langle \alpha, a\phi + b\psi \rangle = a\langle \alpha, \phi \rangle + b\langle \alpha, \psi \rangle.$$

Il est d'abord utile de montrer que δ_n est linéaire.

$$\begin{aligned} \langle \delta_n, a\phi + b\psi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)(a\phi(x) + b\psi(x)) dx \\ \langle \delta_n, a\phi \rangle &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)\phi(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)\psi(x) dx = a\langle \delta_n, \phi \rangle + b\langle \delta_n, \psi \rangle. \end{aligned}$$

On essaye avec le peigne de Dirac:

$$\begin{aligned} \langle \text{III}, a\phi + b\psi \rangle &= \text{III}[a\phi + b\psi] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n[a\phi + b\psi] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a\delta_n[\phi] + b\delta_n[\psi]. \\ \langle \text{III}, a\phi + b\psi \rangle &= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n[\phi] + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n[\psi] = a\langle \text{III}, \phi \rangle + b\langle \text{III}, \psi \rangle. \end{aligned}$$

(b) On écrit à partir de la définition de H :

$$\langle H, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\phi(x)dx = \int_0^{\infty} \phi(x)dx,$$

Et donc H' est définie par:

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^{\infty} \phi'(x)dx = -[\phi(x)]_0^{\infty} = \phi(0) - \underbrace{0}_{\text{supp. borné}} = \langle \delta, \phi \rangle$$

D'où $H' = \delta$.

Exercice 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{a}} * \frac{1}{\sqrt{\pi b}} e^{-\frac{x^2}{b}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi ab}} \int e^{-\frac{t^2}{a}} e^{-\frac{(x-t)^2}{b}} dt \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} \int e^{-\frac{bt^2}{ab} + \frac{-a(x-t)^2}{ab}} dt \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} \int e^{-\frac{bt^2 - ax^2 - at^2 + 2axt}{ab}} dt \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{a}{ab}x^2} \int e^{-\frac{(a+b)t^2 + 2axt}{ab}} dt \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{a}{ab}x^2} \int e^{-\frac{(a+b)}{ab}(t^2 + \frac{2a}{a+b}xt)} dt \end{aligned}$$

Prenons $X = t - \frac{a}{a+b}x$, donc $dt = dX$ et $t^2 - \frac{2atx}{a+b} = X^2 - \frac{(ax)^2}{(a+b)^2}$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{1}{b}x^2} \int e^{-\frac{(a+b)}{ab}(X^2 - \frac{(ax)^2}{(a+b)^2})} dX \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{1}{b}x^2 + \frac{a}{b(a+b)}x^2} \int e^{-\frac{(a+b)}{ab}X^2} dX \end{aligned}$$

On exploite maintenant le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ pour avoir

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{-a-b+a}{b(a+b)}x^2} \sqrt{\frac{\pi(ab)}{a+b}} \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} \sqrt{\frac{\pi(ab)}{a+b}} e^{-\frac{-b}{b(a+b)}x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(a+b)}} e^{-\frac{x^2}{(a+b)}} \end{aligned}$$

Donc on voit que la convolution de deux Gaussiennes est une Gaussienne!