

TD1: variables complexes

Exercice 1 (Conditions de Cauchy-Riemann)

- (a) Puisque f est $\mathbb{C}$ -diff en z_0 , on doit pouvoir calculer la dérivée en approchant z_0 par n'importe quelle direction, et obtenir le même résultat. On choisit donc d'approcher tout d'abord horizontalement ($z = x + iy_0$) puis verticalement ($z = x_0 + iy$).

Approche horizontale ($z = x + iy_0$):

$$f'_h = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Approche verticale ($z = x_0 + iy$):

$$f'_v = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

Et donc puisque $f'_h = f'_v$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

- (b) On définit $P = \operatorname{Re}(f)$ et $Q = \operatorname{Im}(f)$, soit $f = P + iQ$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -i \frac{\partial f}{\partial y} \\ \iff \frac{\partial P + iQ}{\partial x} &= -i \frac{\partial P + iQ}{\partial y} \\ \iff \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_a + i \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_b &= \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial y}}_c - i \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_d \end{aligned}$$

Puisque P et Q sont tous deux réels, on peut identifier les termes de chaque côté de l'équation qui sont proportionnels à 1 (a et c) ou i (b et d):

$$\begin{aligned} \iff \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \iff \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \end{aligned}$$

(c) Enfin, on rappelle que $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$, et (a) implique que $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$ donc $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial f}{\partial x}$ ou $i\frac{\partial f}{\partial y}$, qui sont tout deux égales à f' .

De manière similaire, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) = 0$ car $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 2

(a) Pour décrire le cercle de rayon 1 centré en 0, on peut choisir le paramétrage $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (d'autres sont possibles bien sur!). On peut l'utiliser pour calculer:

$$\int z^n dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^n \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{int} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt$$

On doit distinguer deux cas possibles.

$n = -1$:

$$\int z^n dz = i \int_0^{2\pi} e^{it0} dt = \int_0^{2\pi} dt = i[t]_0^{2\pi} = 2i\pi.$$

$n \neq -1$:

$$\int z^n dz = i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = i \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)} \right)' dt = i \left[\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = \underbrace{\frac{e^0}{i(n+1)} - \frac{e^{i2\pi(n+1)}}{i(n+1)}}_{=0 \text{ car } e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}} = 0.$$

(b) On commence par développer le carré sous l'intégrale:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int \left(U_0 - \frac{R^2 U_0}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right)^2 dz \quad (1)$$

$$= \frac{i\rho}{2} \int \left(U_0^2 + \frac{R^4 U_0^2}{z^4} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} - 2\frac{R^2 U_0^2}{z^2} - 2\frac{i\Gamma U_0}{2\pi z} + 2\frac{R^2 U_0 i\Gamma}{2\pi z^3} \right) dz \quad (2)$$

Grace à (a) on peut enlever tous les termes qui ne sont pas proportionnels à z^{-1} :

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int \left(-\frac{i\Gamma U_0}{\pi z} \right) dz \quad (3)$$

$$= \frac{\rho\Gamma U_0}{2\pi} \int \left(\frac{1}{z} \right) dz \quad (4)$$

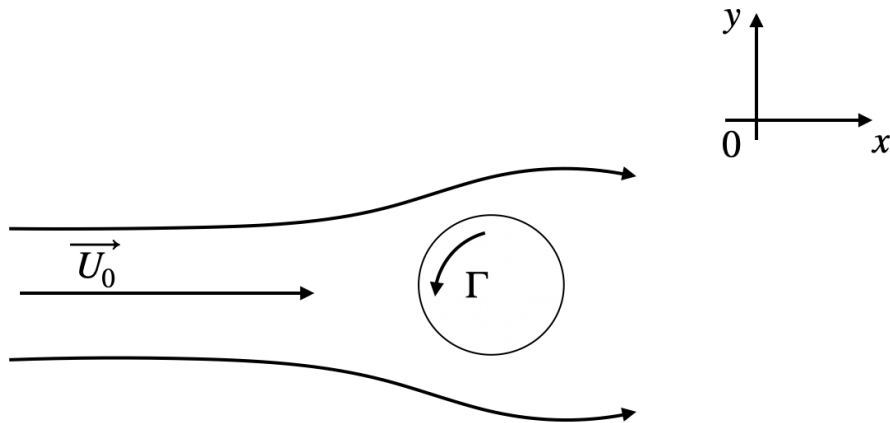
$$= \frac{\rho\Gamma U_0}{2\pi} \times 2i\pi \quad (5)$$

$$= i\rho\Gamma U_0 \quad (6)$$

Et donc, en identifiant les terms proportionels à i de chaque côté:

$$\begin{cases} F_x &= 0 \\ F_y &= \rho \Gamma U_0 \end{cases} \quad (7)$$

NB: ici, ρ correspond à la masse volumique du fluide, U_0 est la vitesse d'écoulement, et Γ la circulation du cylindre en rotation.



Exercice 3

On commence par identifier les pôles de $f(z)$: les points où le dénominateur vaut 0.

$$z^2 + a^2 = 0 \iff z = \sqrt{-a^2} \iff z = \pm ia$$

. (On aurait pu aussi se souvenir de l'identité remarquable $(z - ia)(z + ia) = z^2 + a^2$).

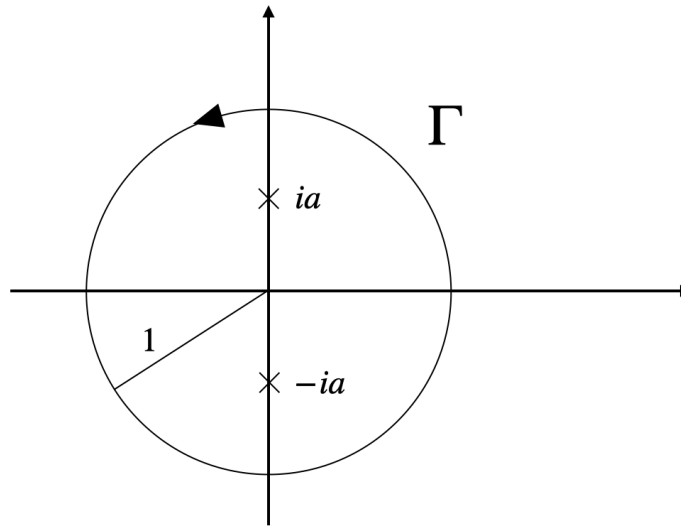
En tout cas, on voit qu'il y a deux pôles d'ordre 1 positionnés à $\pm ia$.

On peut maintenant utiliser le théorème des résidus:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{P_i \in \gamma} \text{Res}(f, P_i),$$

où P_i sont les pôles de f dans γ .

(a) On considère tout d'abord le cercle de rayon 1 centré en 0. Puisque $a \in (0, 1)$, on sait que les deux pôles sont dedans.



$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}(f, ia) + \text{Res}(f, -ia))$$

Il suffit de calculer ces résidus. On exploite le fait que pour un pôle w d'ordre k :

$$\text{Res}(f, w) = \lim_{z \rightarrow w} ((z - w)^k f(z))^{(k-1)},$$

et dans notre cas, puisque les pôles sont d'ordre 1:

$$\text{Res}(f, w) = \lim_{z \rightarrow w} (z - w)f(z).$$

On a donc:

$$\text{Res}(f, ia) = \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{1}{(z - ia)(z + ia)} = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{(z + ia)} = \frac{1}{2ia},$$

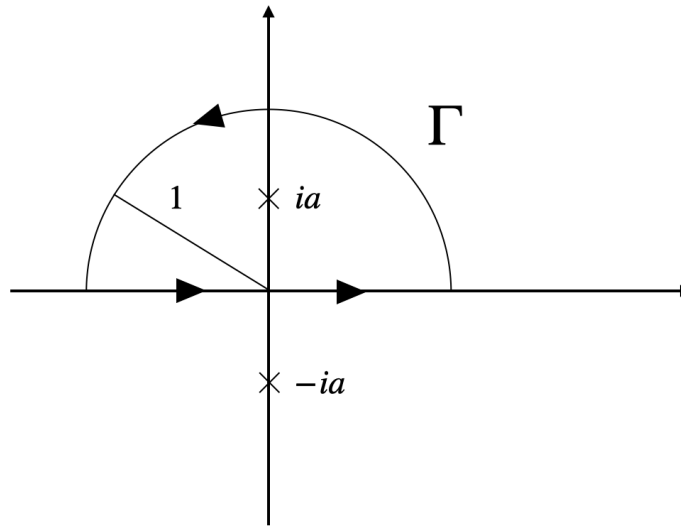
et

$$\text{Res}(f, -ia) = \lim_{z \rightarrow -ia} (z + ia) \frac{1}{(z - ia)(z + ia)} = \lim_{z \rightarrow -ia} \frac{1}{(z - ia)} = -\frac{1}{2ia},$$

Et puisque ces deux pôles sont dans le cercle de rayon 1 centré en 0,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2ia} - \frac{1}{2ia} \right) = 0.$$

- (b) On considère maintenant le demi-cercle supérieur de rayon 1 centré en 0, ainsi que le segment $[-1, 1]$ sur l'axe réel.



Cette fois, seulement le pôle $+ia$ est à l'intérieur, donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, ia)) = \frac{2i\pi}{2ia} = \frac{\pi}{a}.$$

- (c) Maintenant on passe à $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{(z+ia)^2(z-ia)^2}$. On reconnait que cette fonction à les mêmes pôles que dans les questions précédentes, mais cette fois, ils sont d'ordre 2 plutôt que 1. On utilisera donc

$$\text{Res}(f, w) = \lim_{z \rightarrow w} ((z-w)^2 f(z))^{(2-1)} = \lim_{z \rightarrow w} ((z-w)^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow w} \left(\frac{(z-w)^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2} \right)'.$$

Tout d'abord, on calcule la limite dans le cercle qui contient les deux pôles, donc:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, ia) + \text{Res}(f, -ia)) \\ &= 2i\pi \left(\lim_{z \rightarrow ia} \left(\frac{(z-ia)^2}{(z+ia)^2} (z-ia)^2 \right)' + \lim_{z \rightarrow -ia} \left(\frac{(z+ia)^2}{(z+ia)^2} (z-ia)^2 \right)' \right) \\ &= 2i\pi \left(\lim_{z \rightarrow ia} \left(\frac{1}{(z+ia)^2} \right)' + \lim_{z \rightarrow -ia} \left(\frac{1}{(z-ia)^2} \right)' \right) \\ &= 2i\pi \left(\lim_{z \rightarrow ia} \frac{-2}{(z+ia)^3} + \lim_{z \rightarrow -ia} \frac{-2}{(z-ia)^3} \right) \\ &= 2i\pi \left(2 \frac{1}{(2ia)^3} + 2 \frac{1}{(-2ia)^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

Donc une fois de plus, les deux résidus s'invalident!

(d) Si par contre on prends le demi cercle supérieur, on n'a que le pôle $+ia$ dedans, et donc:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= 2\pi i \text{Res}(f, ia) = 2i\pi \lim_{z \rightarrow ia} \left(\frac{(z-ia)^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2} \right)' \\ &= 2i\pi \lim_{z \rightarrow ia} \left(\frac{1}{(z+ia)^2} \right)' \\ &= 2i\pi \lim_{z \rightarrow ia} 2 \frac{1}{(z+ia)^3} \\ &= 2i\pi \frac{-2}{(2ia)^3} = \frac{4i\pi}{i8a^3} = \frac{\pi}{2a^3}\end{aligned}$$

Exercice 4

On cherche à calculer $\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\mu}{\mu^2 + 4\pi^2 t^2} e^{-2i\pi \nu t} dt$. Pour le faire, on va passer dans le plan complexe : $t \rightarrow z \in \mathbb{C}$, et on écrit $g(z) = \frac{2\mu}{\mu^2 + 4\pi^2 z^2} e^{-2i\pi \nu z}$. On va utiliser le chemin γ qui est un demi-cercle de rayon r centré en 0 ($\frown$) et une droite sur l'axe réel ($\rightarrow$) de longueur $2r$. On fera ensuite tendre r vers l'infini, et le " $\rightarrow$ " sera tout l'axe réel, ce qui correspond à l'intégrale dont on a besoin, et on utilisera le lemme de Jordan pour montrer que l'intégrale sur $\frown$ vaut zero.

$$\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_{\rightarrow} g(z)dz = \int_{\gamma} g(z)dz - \int_{\frown} g(z)dz.$$

Tout d'abord, il est utile d'identifier les pôles de $g(z)$: $\mu^2 + 4\pi^2 z^2 = 0 \iff z = \pm \frac{i\mu}{2\pi}$. On peut réécrire $\mu^2 + 4\pi^2 z^2 = (4\pi^2)(z - \frac{i\mu}{2\pi})(z + \frac{i\mu}{2\pi})$. Ce sont des pôles simples, sur l'axe imaginaire.

Commençons par invoquer le lemme de Jordan: si une fonction g est continue sur un arc de cercle de rayon r centré en 0 tel que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zg(z) = 0$, alors $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\text{arc}} g(z)dz = 0$.

Dans notre cas, $zg(z) = \frac{2iz\mu}{\mu^2 + 4\pi^2 z^2} e^{-2i\pi \nu z} = \frac{2iz\mu}{\mu^2 + 4\pi^2 z^2} e^{-2i\pi \nu x} e^{2\pi \nu y}$. La limite de cette quantité dépend du dernier terme. Il faut que $\nu y \rightarrow -\infty$ pour que $zg(z) \rightarrow 0$. On va donc distinguer deux cas.

$\nu < 0$ et $y \rightarrow \infty$:

$y \rightarrow \infty$ implique qu'on considère l'arc de cercle du côté supérieur du plan, qui contient le pôle $\frac{i\mu}{2\pi}$. On peut calculer le résidu de g en ce pôle :

$$\text{Res}(g, \frac{i\mu}{2\pi}) = \lim_{z \rightarrow \frac{i\mu}{2\pi}} (z - \frac{i\mu}{2\pi}) \frac{2\mu e^{-2i\pi \nu z}}{(4\pi^2)(z - \frac{i\mu}{2\pi})(z + \frac{i\mu}{2\pi})} = \frac{1}{2\pi i} e^{\nu \mu}$$

Donc:

$$\begin{aligned}\int_{\rightarrow} g(z)dz &= \underbrace{\int_{\gamma} g(z)dz}_{= 2i\pi \text{Res}(g, \frac{i\mu}{2\pi})} - \underbrace{\int_{\frown} g(z)dz}_{0 \text{ par Jordan et } r \rightarrow \infty}\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \int_{\rightarrow} g(z) dz = e^{\nu\mu}$$

$\nu > 0$ et $y \rightarrow -\infty$:

Dans ce cas, on passe par l'arc de cercle inférieur. Mais attention, cette fois on tourne dans le sens indirect alors on a un facteur -1 pour le chemin fermé.

On calcule déjà le résidu qu'il nous faut:

$$\text{Res}(g, -\frac{i\mu}{2\pi}) = \lim_{z \rightarrow \frac{i\mu}{2\pi}} (z + \frac{i\mu}{2\pi}) \frac{2\mu e^{-2i\pi\nu z}}{(4\pi^2)(z - \frac{i\mu}{2\pi})(z + \frac{i\mu}{2\pi})} = -\frac{1}{2\pi i} e^{-\nu\mu}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\rightarrow} g(z) dz &= (-1) \underbrace{\int_{\gamma} g(z) dz}_{= 2i\pi \text{Res}(g, -\frac{i\mu}{2\pi})} - \underbrace{\int_{\curvearrowright} g(z) dz}_{0 \text{ par Jordan et } r \rightarrow \infty} \\ &\Longleftrightarrow \int_{\rightarrow} g(z) dz = e^{-\nu\mu} \end{aligned}$$

On peut donc écrire dans tous les cas que:

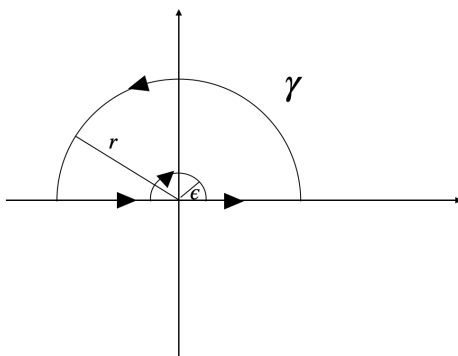
$$\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = e^{-|\nu|\mu}.$$

Exercice 5

On veut calculer la valeur de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$. Pour le faire, on passe dans le plan complexe et on remarque que puisque $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, alors I est la partie imaginaire de l'intégrale de $\frac{e^{it}}{x}$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right].$$

La fonction sous l'intégrale a visiblement un pôle simple en 0. On va considérer un chemin d'intégration fermé γ qui est composé d'un arc de cercle de rayon r , de deux segments sur l'axe réel, et d'un plus petit arc de cercle centré en 0 de rayon ϵ .



La stratégie sera la suivante: puisque γ est fermé et ne contient pas le pôle, l'intégrale sur γ vaudra zero. On utilisera les lemmes de Jordan pour evaluer les intégrales sur les demi-cercles de rayon r et ϵ , en les faisant tendre vers ∞ et 0 respectivement. Ce qu'il restera sera donc l'intégrale sur l'axe réel, ce qu'on cherche à calculer!

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\curvearrowright_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\curvearrowright_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{--} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Tout d'abord, on utilise le deuxième lemme de Jordan: pour γ un arc de cercle de rayon r (et c'est bien le cas ici): si $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ alors $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz = 0$. Et en effet, $\frac{1}{z} \rightarrow 0$, donc ce lemme s'applique:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0 \implies \int_{\gamma} \frac{1}{z} e^{iz} dz = 0,$$

et il nous reste:

$$0 = - \int_{\curvearrowright_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{--} \frac{e^{iz}}{z} dz,$$

en notant qu'on a échangé le signe de l'intégrale sur le demi-cercle de rayon ϵ pour qu'il passe dans le sens direct.

Ensuite, pour l'arc de cercle de rayon ϵ on utilise le troisième lemme de Jordan. Si f a un pôle simple en $z = 0$ et l'arc de cercle est entre θ_1 et θ_2 , alors: $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \text{Res}(f, 0)$.

Ici $\theta_2 - \theta_1 = \pi - 0$. Il nous reste à trouver le résidu de f en 0 .

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{z} = e^0 = 1.$$

On a donc

$$\int_{--} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\curvearrowright_{\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi,$$

Et enfin, on prends la partie imaginaire de chaque côté pour trouver:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz \right] = \text{Im}(i\pi) = \pi.$$