

Mathématiques pour Physiciens

Dr. Louie Corpe, d'après J. Donini et d'autres!

13 septembre 2022

Table des matières

1	Variables complexes	5
1.1	Quelques rappels	5
1.1.1	L'ensemble des nombres complexes	5
1.1.2	Topologie sur $\mathbb{C}$	5
1.1.3	Isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$	5
1.2	Différentiabilité et fonctions holomorphes	6
1.2.1	Définitions	6
1.2.2	Conditions de Cauchy-Riemann	6
1.2.3	Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	7
1.3	Intégration	8
1.3.1	Courbes et chemins	8
1.3.2	Intégrale sur un chemin	9
1.3.3	Indice d'un chemin	10
1.3.4	Exemple fondamental	10
1.4	Le théorème de Cauchy	11
1.4.1	Énoncé	11
1.4.2	Conséquences	11
1.5	Primitives	12
1.5.1	Ouverts simplement connexes	12
1.5.2	Ouverts avec trous	13
1.6	Singularités d'une fonction	14
1.6.1	Singularités artificielles	14
1.6.2	Pôles	14
1.6.3	Singularités essentielles	14
1.7	Théorème des résidus	15
1.7.1	Formule de Cauchy	15
1.7.2	Développement en série de Laurent	16
1.7.3	Formule de Cauchy pour les dérivées	17
1.7.4	Théorème des résidus	18
1.7.5	Lemmes de Jordan	19
2	Distributions et convolutions	21
2.1	Introduction	21
2.1.1	Densité de charge	21
2.1.2	Choc élastique	22
2.2	Définitions et propriétés	22
2.2.1	Définitions	22
2.2.2	Propriétés	24

2.3	Convolutions	26
2.3.1	Convolution de deux fonctions	26
2.3.2	Convolution de deux distributions	29
3	Transformées de Fourier	33
3.1	Définition et propriétés	33
3.2	TF pour fonctions	33
3.2.1	TF pour distributions	34
3.2.2	Propriétés	34
3.2.3	Parenthèse : lien avec espaces vectoriels	35
3.2.4	Propriétés (bis)	36
3.2.5	Dérivation	37
3.2.6	Autocorrelation et fonctions périodiques	39
3.2.7	Quelques TFs célèbres	39
3.3	TF à N dimensions	40
3.3.1	Définition	40

Chapitre 1

Variables complexes

1.1 Quelques rappels

1.1.1 L'ensemble des nombres complexes

$\mathbb{C}$ peut s'écrire :

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \quad (1.1)$$

$$= \{re^{i\theta} : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}, \quad (1.2)$$

et on rappelle que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1.1.2 Topologie sur $\mathbb{C}$

Norme et distance La norme est définie de la manière usuelle : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, et la distance entre z et w est $|z - w|$.

Boule ouverte La boule ouverte de centre z_0 et de rayon r dans l'ensemble complexe est le disque centré en z_0 et de rayon r , $D(z_0, r)$, qui est défini par :

$$D(z_0, r) = \{t \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}. \quad (1.3)$$

Voisinage On appelle le voisinage de z_0 , l'ensemble contenant une boule ouverte de centre z_0 .

Ouvert On appelle l'ouvert de $\mathbb{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ qui contient le voisinage de chacun de ses points. Un ensemble est fermé si son complémentaire est ouvert.

1.1.3 Isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

On dit que l'application ϕ définie sur $\mathbb{C}$ par $\phi(z = x + iy) = f(x, y)$ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2 : \mathbb{C} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$.

Si f est définie dans $\mathbb{C}$ au voisinage de z , alors $f \circ \phi^{-1}$ est définie dans $\mathbb{R}^2$ au voisinage d'un point (x, y) .

f définie dans $\mathbb{C} \implies f(x, y) := f \circ \phi^{-1}(x, y)$.

f définie dans $\mathbb{R} \implies f(z) := f \circ \phi^{-1}(z)$.

En pratique on assimilera librement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$: $f(x, y) = f(z)$. (Mais on note en passant que la condition de différentiabilité de $\mathbb{C}$ est plus restrictive que la différentiabilité en $\mathbb{R}^2$.)

1.2 Différentiabilité et fonctions holomorphes

1.2.1 Définitions

Note : on utilise de manière interchangeable les mots *différentiable* et *dérivable*.

Définition 1.2.1 ($\mathbb{C}$ -différentiabilité). Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est différentiable en $\mathbb{C}$ (ou en abrégé, $\mathbb{C}$ -diff) en z_0 si

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1.4)$$

existe. On appelle donc cette limite la dérivée de f en z_0 . C'est un nombre complexe indépendant de la façon dont z tends vers z_0 . Si Eq. 1.4 admet deux limites différentes lorsque $z \rightarrow z_0$ sur deux chemins distincts, alors f n'est pas $\mathbb{C}$ -différentiable en z_0 !

Exemple. $z \rightarrow z$ est $\mathbb{C}$ -diff sur $\mathbb{C}$ mais $z \rightarrow \bar{z}$ ne l'est pas ! En effet,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + t} - \bar{z}_0}{(z_0 + t) - z_0} = +1,$$

mais

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + it} - \bar{z}_0}{(z_0 + it) - z_0} = -1$$

Définition 1.2.2 (Holomorphisme). Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction est holomorphe sur D si elle est $\mathbb{C}$ -diff en tout point de D .

1.2.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Soit f une fonction $\mathbb{C}$ -diff en un point $z_0 = x_0 + iy_0$ de $\mathbb{C}$. Les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) sont définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \quad (1.6)$$

où f , $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont toutes $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

En considérant les nombres de la forme $z = x + iy_0$ nous avons :

$$f'_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad (1.7)$$

et de même avec $z = x_0 + iy$:

$$f'_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (1.8)$$

D'où la définition suivante.

Définition 1.2.3 (Condition de Cauchy-Riemann (1)). Si f est $\mathbb{C}$ -diff (holomorphe) en z_0 , on doit avoir $f'_1(z_0) = f'_2(z_0)$, et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \quad (1.9)$$

Si une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est différentiable en (x_0, y_0) , alors $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'est aussi.

Démonstration.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \dots$$

et comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ on a :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + [(x - x_0) + i(y - y_0)] \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \dots$$

soit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \dots = f(z_0) + (z - z_0) f'(x_0, y_0) + \dots$$

□

1.2.3 Les opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}^2$ -différentiable (donc pas forcément au sens complexe). Une propriété d'une fonctions $\mathbb{R}^2$ -diff est la suivante :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (1.10)$$

Comme $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ sont $\mathbb{R}^2$ -diff, on a :

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy, \quad (1.11)$$

et par conséquent :

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}). \quad (1.12)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$df = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} (dz - d\bar{z}) \quad (1.13)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z} \quad (1.14)$$

On introduit alors les définitions suivantes.

Définition 1.2.4.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (1.16)$$

et il vient :

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{z}. \quad (1.17)$$

Définition 1.2.5 (Condition de Cauchy-Riemann). Si f est $\mathbb{C}$ -diff (holomorphe) en z_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0). \quad (1.18)$$

En effet, les quatres proposition sont equivalentes :

- f est holomorphe en $z_0 \in \Omega$;
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$;
- $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}(x_0, y_0)$;
- $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ (et $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$).

1.3 Intégration

1.3.1 Courbes et chemins

Une courbe γ dans un ouvert D de $\mathbb{C}$ est une application *continue*. Si a et $b \in \mathbb{R}$, alors $\gamma : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{C}$ est un *paramétrage*. On note l'image de la courbe : $\operatorname{Im} \gamma = \{\gamma(t), t \in [a, b]\}$.

Une courbe est simple si elle ne se recoupe pas, et fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Deux paramétrages γ_1 et γ_2 son équivalents si ils ont la même image et si il existe $u : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ tel que

$$\gamma_2 \circ u = \gamma_1.$$

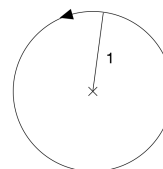
Exemple (Cercle de rayon unité).

$$\gamma_1 : [0, -2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = e^{it}$$

et

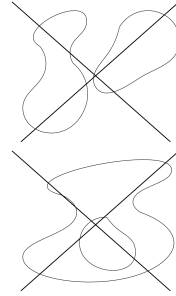
$$\gamma_2 : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = e^{-2i \cos t}$$

sont *équivalents*, avec $u(t) = 2\pi \cos t$.



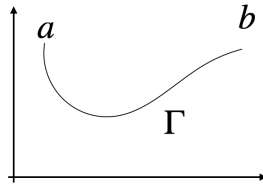
Un chemin est une courbe continue et dérivable (“de classe C''' ”) continue et dérivable par morceaux.

Un ouvert connexe est un ouvert en un seul morceau. On peut montrer que tout sous-ensemble ouvert D de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement si deux points quelconques de D peuvent être joints par un chemin contenu dans D .



Un ouvert simplement connexe n'a pas de trous.

1.3.2 Intégrale sur un chemin



Définition 1.3.1 (Intégrale sur un chemin).

On définit pour une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (où f n'est pas forcément holomorphe) et pour un chemin Γ :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt, \quad (1.19)$$

où $\gamma(t)$ est un paramétrage de Γ . **La valeur de l'intégrale ne dépend pas du paramétrage choisi.**

Démonstration. Si γ_1 et γ_2 sont deux paramétrages d'un même chemin, alors il existe u continu et dérivable tel que $\gamma_2 \circ u = \gamma_1$ et il vient :

$$\int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \stackrel{t=u(s)}{=} \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(u(s)))\gamma_2'(u(s))u'(s)ds \quad (1.20)$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds \quad (1.21)$$

□

Par la suite nous ne considérerons que des chemins *simples*. Attention, le sens du parcours est important !

$$\int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt \quad (1.22)$$

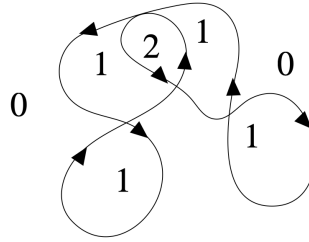
1.3.3 Indice d'un un chemin

Définition 1.3.2 (Indice d'un chemin).

On appelle l'indice d'un chemin fermé Γ pour tout z dans le complémentaire de Γ dans $\mathbb{C}$:

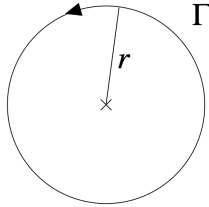
$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{dt}{t - z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\Gamma\}. \quad (1.23)$$

En anglais, cet indice est nommé le *winding number* (numéro d'enroulement). Il représente le nombre de fois qu'une courbe tourne autour d'un point.



1.3.4 Exemple fondamental

Un exemple très important de l'intégration sur chemin est celui de la fonction $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ sur un cercle centré sur 0.



On choisit le paramétrage suivant :

$$\gamma(t) = re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Alors,

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt \quad (1.24)$$

$$= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it} dt \quad (1.25)$$

$$= \int_0^{2\pi} ir^{n+1} e^{i(n+1)t} dt \quad (1.26)$$

et nous avons deux cas possibles :

$$\begin{cases} \text{si } n \neq -1, & \int_{\Gamma} z^n dz = ir^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 \\ \text{si } n = -1, & \int_{\Gamma} z^n dz = i \int_0^{2\pi} 1 dt = i2\pi \text{ (sens direct)} \end{cases} \quad (1.27)$$

Ce résultat $\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2i\pi$ s'avère être très utile. Il est toujours vrai même si le cercle n'est pas centré sur 0. En effet il suffit de faire un changement de variable pour montrer que pour $w \in \mathbb{C}$, Γ_w un cercle centré en w :

$$\int_{\Gamma_w} \frac{1}{z-w} dz \underset{t=z-w}{=} \int_{\Gamma} \frac{1}{t} dt = 2i\pi. \quad (1.28)$$

1.4 Le théorème de Cauchy

1.4.1 Énoncé

Théorème 1.4.1 (Théorème de Cauchy). *Soit f holomorphe sur un ouvert simplement connexe de Ω , alors pour tout chemin fermé Γ de Ω :*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (1.29)$$

Démonstration.

Soit f holomorphe sur un ouvert simplement connexe de Ω , (donc les dérivées partielles de f sont continues), et γ un chemin fermé de Ω . On pose alors $f = u + iv$, donc $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$. Puisque $dz = dx + idy$, on a

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \oint_{\gamma} (udx - vdy) + i \oint_{\gamma} (vdx + udy),$$

On applique le théorème de Green, qui permet de remplacer les intégrales autour de γ fermé par une intégrale de surface sur le domaine D délimité par γ :

$$\oint_{\gamma} (udx - vdy) = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$\oint_{\gamma} (vdx + udy) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,$$

et comme f est holomorphe on a $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, et les deux intégrales doubles s'annulent et on retrouve :

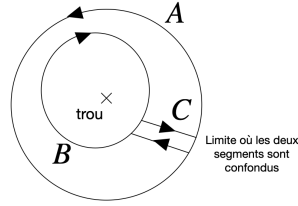
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

□

1.4.2 Conséquences

- Pour tout chemin n'entourant pas de "trous" (= singularités) de l'ouvert sur lequel $f(z)$ est défini, le théorème de Cauchy s'applique, et $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.
- Mais si Γ entoure un trou, ce n'est pas forcément le cas !
- Si deux chemins entourent le même trou, alors les intégrales de f sur ces deux chemins ont la même valeur (si parcourus dans le même sens).

Démonstration.



Le chemin $A \cup B \cup C$ ne contient pas de le trou, donc on applique Cauchy.

$$\int_{A \cup B \cup C} f(z) dz = 0 = \int_{A \searrow} f(z) dz + \int_{B \swarrow} f(z) dz + \underbrace{\int_C f(z) dz}_{=0 \text{ (chemin fermé)}},$$

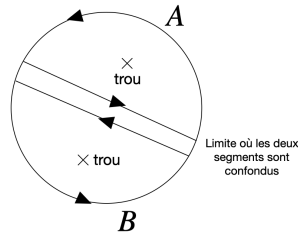
d'où :

$$\int_{A \searrow} f(z) dz = \int_{B \swarrow} f(z) dz.$$

□

- Si un chemin entoure deux trous, l'intégrale de f sur ce chemin est la somme des intégrales de f sur les chemins entourant chacun des trous.
La valeur d'une intégrale sur un chemin ne dépends que des trous qu'il entoure !

Démonstration.



$$\int_A f dz + \int_B f dz = \int_{\bigcirc} f dz + \underbrace{\int_{\uparrow \downarrow} f dz}_{=0 \text{ (chemin fermé)}}$$

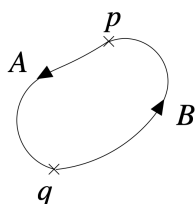
□

1.5 Primitives

1.5.1 Ouverts simplement connexes

Sur un ensemble simplement connexe, l'intégrale sur un chemin ouvert ne dépend que du point de départ et point d'arrivée.

Démonstration.



$$\int_{A \searrow} f dz + \int_{B \nwarrow} f dz = \underbrace{\int_{\uparrow \downarrow} f dz}_{=0 \text{ (chemin fermé)}}$$

et donc

$$\int_{A \searrow} f dz = \int_{B \nwarrow} f dz$$

□

Définition 1.5.1 (Primitive).

$$\int_p^z f(t) dt,$$

définit alors une primitive de f sur l'ouvert simplement connexe considéré (où p est un point arbitraire de cet ouvert).

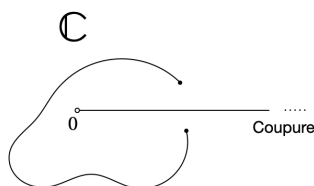
1.5.2 Ouverts avec trous

On peut aussi définir une primitive sur un ouvert qui comporte des trous, mais avec prudence !

Exemple ($f(x) = z^{-n}$, $n > 1$). Prenons $f(x) = \frac{1}{z^n}$, $n > 1$. Il y a une singularité (= un trou) en 0 mais comme on a vu dans l'exemple de du Chap. 1.3.4, $\oint f(z) dz = 0$. Dans ce cas, comme avant, l'intégrale sur le chemin ne dépend que du point de départ et d'arrivée. On peut donc définir une primitive dans ce cas, et elle est évidente : si $n \neq -1$, $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}$

Exemple ($f(x) = z^{-1}$). Prenons $f(x) = \frac{1}{z}$. Cette fois quand on tourne autour du pôle, l'intégrale n'est pas nulle. Comme vu dans Chap. 1.3.4, $\oint_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi$ pour γ cercle. L'intégrale entre deux points dépend donc de si l'on est passé à gauche ou à droite du trou.

Dans ce dernier exemple, on ne peut pas définir de primitive sauf si l'on introduit une coupure : une courbe suivant laquelle on découpe $\mathbb{C}$ et qui part de $0 \rightarrow \infty$.



$\mathbb{C}$ sans cette coupure est toujours simplement connexe, mais il n'y a plus de trou et on n'a plus le choix de passer d'un côté ou de l'autre du pôle. On peut alors définir la primitive :

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln z, \quad \text{sur } \mathbb{C}^* \setminus \{\text{coupure}\}.$$

Le fait d'avoir besoin de cette coupure est lié au caractère périodique de la représentation exponentielle des nombres complexes. Par analogie, $\sin x = a$ n'a pas de solution unique, mais une infinité de solutions : $x = \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. De manière similaire, $\ln z = a$ donne $\ln(re^{i\theta}) = a$ et donc $\ln(r) + i\theta$ est une solution possible, mais puisque $e^{i\theta} = e^{i(2\pi k)\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$, il y a en fait une infinité de solutions $\ln(r) + i(2\pi k)\theta$. Imposer cette coupure est l'équivalent de considérer $\sin x$ uniquement sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

1.6 Singularités d'une fonction

Il existe trois types de singularités : artificielles, pôles et singularités essentielles.

1.6.1 Singularités artificielles

Les singularités artificielles ont lieu quand f semble avoir un pôle mais est en réalité bornée : $\exists M \in \mathbb{R} : |f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}$. C'est juste que f est mal écrite au départ !

Exemple.

$f : z \rightarrow \frac{(4z^2+1)}{(2z+1)}$ a une singularité artificielle en $z = -\frac{1}{2}$.

mais

$f : z \rightarrow 2z - 1$ est définie sur tout $\mathbb{C}$.

1.6.2 Pôles

Si f est holomorphe sur Ω sauf en $\{a\}$ et si $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)|$ existe et vaut ∞ , alors $\{a\}$ est un pôle.

1.6.3 Singularités essentielles

Si f est holomorphe sur Ω sauf en $\{a\}$, mais f n'admet pas de limite en a , on l'appelle une singularité essentielle.

Exemple.

$$f : z \rightarrow e^{\frac{1}{z}}$$

Au voisinage de 0, f prend toutes les valeurs de $\mathbb{C}$ sauf 0. En effet, $\forall \lambda \neq 0, \quad \lambda = e^w, \quad (w \in \mathbb{C})$. Soit $z_n = \frac{1}{(w+2i\pi n)}$, alors $z_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Et donc $f(z_n) = e^{w+2i\pi n} = \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple.

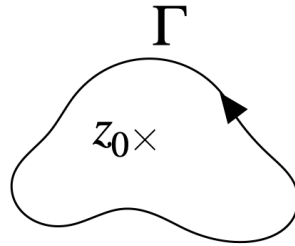
$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

f a un pôle en 0 s'il y a un nombre fini de coefficients a_n non nuls avec $n < 0$. Au contraire, si il y en a une infinité, alors f a une singularité essentielle en z_0 .

1.7 Théorème des résidus

1.7.1 Formule de Cauchy

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur Ω et Γ un chemin simple fermé dans le sens direct. Considérons z_0 un point entouré par Γ .



On considère la fonction $g(z)$ telle que :

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z}, & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z), & \text{si } z = z_0. \end{cases} \quad (1.30)$$

$g(z)$ est holomorphe et donc :

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0 = \int_{\Gamma} \frac{f(z_0)}{z_0 - z} dz - \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z_0 - z} dz \quad (1.31)$$

$$= -f(z_0) \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_0} dz}_{=2i\pi \text{ (d'après Eq.1.28)}} + \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (1.32)$$

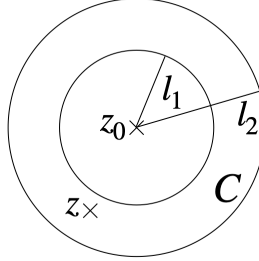
$$(1.33)$$

d'où la formule de Cauchy :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (1.34)$$

1.7.2 Développement en série de Laurent

Théorème 1.7.1. Soit f une fonction holomorphe sur une couronne C centrée et z_0 , et de rayons $0 \leq l_1 \leq l_2 < \infty$ tel que : $l_1 < |z - z_0| < l_2$.
(La couronne peut très bien être $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$).



Alors f admet un développement unique :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1.35)$$

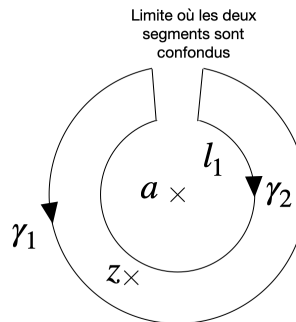
avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (1.36)$$

où γ est un contour quelconque compris dans la couronne, faisant une et une seule fois le tour de z_0 dans le sens direct. Autrement dit : $\text{Ind}_{\gamma}(z_0) = 1$.

On appelle a_{n-1} ($= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$) le résidu de f en z_0 . Il est noté aussi $\text{Res}(f, z_0)$.

Démonstration. On note γ_1 et γ_2 respectivement le chemin circulaire extérieur et intérieur. Au centre de la couronne on a éventuellement un pôle a .



$\forall z$ à l'intérieur de la couronne, d'après la formule de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.37)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1^{\curvearrowright}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2^{\curvearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.38)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1^{\curvearrowright}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2^{\curvearrowright}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.39)$$

$$(1.40)$$

On a donc sur γ_1 (extérieur) :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \times \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}.$$

Puisqu'on est sur γ_1 (bord extérieur de la couronne), on a $|\frac{z-a}{\zeta-a}| < 1$. Et on peut utiliser le fait que $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\forall |x| < 1$, pour écrire :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

De même, sur γ_2 (intérieur), on a $|\frac{\zeta-a}{z-a}| < 1$, et donc :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{-(z-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n} i = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

Enfin, on utilise ces deux sommes pour écrire :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta - \int_{\gamma_2} f(\zeta) \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \end{aligned}$$

On a pu remplacer γ_1 et γ_2 par γ dans cette équation car termes positifs de la somme sont toujours donnés par $\gamma = \gamma_1$ et les termes négatifs par $\gamma = \gamma_2$. $\square$

1.7.3 Formule de Cauchy pour les dérivées

Si f est holomorphe en a alors il ne peut y avoir de terme en $\frac{1}{z^n}$ dans le développement en série de Laurent. Donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ puisque les termes avec $n < 0$ ne sont pas définis !

On reconnaît que cela revient à une série de Taylor. On rappelle que les coefficients d'une série de Taylor sont $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ où $^{(n)}$ représente la n -ème dérivée.

Par conséquent, on peut écrire ce qu'on appelle parfois la formule de Cauchy pour les dérivées :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (1.41)$$

1.7.4 Théorème des résidus

Énoncé

Théorème 1.7.2 (Théorème des résidus).

Soit Ω un ouvert simplement convexe, f holomorphe sur Ω sauf aux points $\{P_i\}$ et γ un chemin fermé dans Ω dans le sens positif ne passant pas par les points $\{P_i\}$. Alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{P_i \in \gamma} \text{Res}(f, P_i) \quad (1.42)$$

Ordre d'un pôle

Si le développement de la série de Laurent de f en a s'arrête ($\exists N : a_n = 0, \forall n < N$) alors on dit que a est un pôle d'ordre N . Un pôle d'ordre 1 est une pôle simple.

On note que si f est holomorphe de partout sur Ω sauf $\{a\}$, on peut écrire

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^N \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}, \quad (1.43)$$

avec g une fonction holomorphe sur Ω et N l'ordre du pôle en a .

Résidu d'un pôle

Pôle simple

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

et donc on a

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = a_{-1}. \quad (1.44)$$

Pôle d'ordre 2

On a :

$$f(z) = a_{-2}(z-a)^{-2} + a_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad (1.45)$$

$$(z-a)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z-a) + \underbrace{g(z)}_{\text{Eq 1.43}} (z-a)^{n+2}, \quad (1.46)$$

$$((z-a)^2 f(z))' = a_{-1} + a_{-1} + g'(z)(z-a)^2 + 2g(z)(z-a), \quad (1.47)$$

D'après Eq 1.43, $g(z)$ est holomorphe en a et $g'(z)(z-a)^2 + 2g(z)(z-a) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow a$, et donc

$$\lim_{z \rightarrow a} ((z-a)^2 f(z))' = a_{-1}. \quad (1.48)$$

Pôle d'ordre k

Plus généralement on a :

$$\lim_{z \rightarrow a} ((z-a)^k f(z))^{(k-1)} = a_{-1}. \quad (1.49)$$

Trouver l'ordre d'un pôle

Pour trouver l'ordre d'un pôle, on peut tenter un développement asymptotique en a .

Exemple.

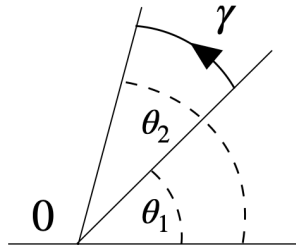
$$f(z) : z \rightarrow \frac{1}{(z^2 + a^2)^N} = \frac{1}{(z + ia)(z - ia)^N},$$

et donc $\pm ia$ sont des pôles d'ordre N .

1.7.5 Lemmes de Jordan

Les lemmes suivants sont utiles pour le calcul des résidus ! On considère un arc de cercle centré en 0 :

$$\gamma(\theta, r) = \{re^{i\theta} : 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi\}.$$



Lemme (1). Soit f continue sur γ .

$$\text{Si } \lim_{|z| \rightarrow \infty} zf(z) = 0, \text{ alors } \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Lemme (2).

$$\text{Si } \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0, \text{ alors } \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz = 0.$$

Lemme (3). Soit f possédant un pôle simple en $z = 0$. Alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \times \text{Res}(f, 0).$$

Lemme (4). *Soit f continue sur γ .*

$$\text{Si } \lim_{|z| \rightarrow 0} z f(z) = 0, \text{ alors } \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Chapitre 2

Distributions et convolutions

2.1 Introduction

2.1.1 Densité de charge

Imaginons une particule ponctuelle de charge q située en $\vec{r}_0$. Elle produit en $\vec{r}$ un champ électrostatique :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3}. \quad (2.1)$$

Si plusieurs charges sont présentes, il y a une superposition des champs créés par chacune (Maxwell) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}. \quad (2.2)$$

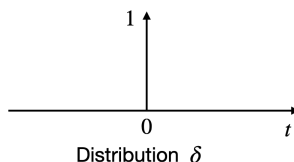
Cependant, à l'échelle *macroscopique* on préfère considérer la distribution de charges sous forme continue $\rho(\vec{r}_0)$. La charge continue dans $d^3r = dxdydz$ étant $dq = \rho(\vec{r}_0)dxdydz$. On a alors :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\vec{r}'. \quad (2.3)$$

Peut-on concilier les Eqs 2.1 et 2.3 pour les charges ponctuelles et densités de charges ?

Pour cela il faudrait décrire une charge ponctuelle avec les outils du “continu”, en introduisant la “fonction” δ :

$$\delta = \begin{cases} +\infty & \text{si } \vec{r} = \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$



Par convention, on représente le “pic” infini à zero par une flèche, avec facultativement un chiffre à côté qui représente non la hauteur (qui est infinie !) par l’aire contenu sous la flèche.

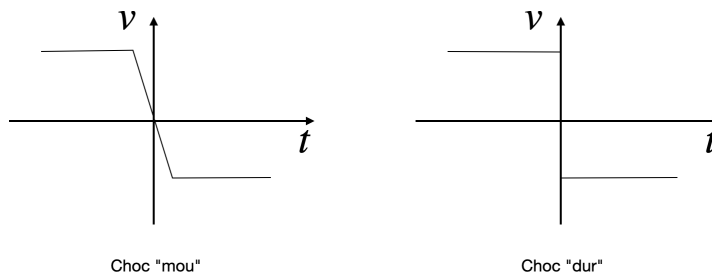
Et dans ce cas on peut réécrire Eq 2.5 dans la le langage du continu :

$$\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} \rightarrow \sum_i \iiint \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\vec{r}'. \quad (2.5)$$

δ n’est évidemment pas une fonction mais c’est un outil mathématique bien utile en physique. C’est ce qui a motivé L. Schwartz (et d’autres) à élaborer la théorie des distributions qui donne entre autres un sens rigoureux à δ .

2.1.2 Choc élastique

Le problème de l’impulsion et des forces lors d’un choc élastique, tel que quand une balle rebondit sur un mur, bénéficie également de nouveaux outils mathématiques. Si on prends l’exemple de la balle contre le mur, le graphe de la vitesse est :



Or Newton nous dis que tout au long du mouvement, la force f exercée sur la balle est $f = m\dot{v}$, donc proportionnelle à la dérivée de $v(t)$. Ici, ni la dérivée de v , ni l’intégrale de la force sont définies lors du choc. On a besoin de nouvelles “fonctions” qui ne sont pas habituelles !

2.2 Définitions et propriétés

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1 (Distribution).

On appelle distribution toute fonctionnelle linéaire et continue sur l’espace-test

D . Les distributions forment un espace vectoriel, appelé le dual topologique de D , que l'on nomme espace des distributions D' .

Dans cette définition, on s'est servi des notions ci-dessous :

Fonctionnelle : une fonction de fonctions

$$\alpha : \psi \in \mathbb{F} \text{ (espace des fonctions)} \rightarrow \alpha[\psi] \in \mathbb{C}. \quad (2.6)$$

$\alpha[\psi]$ peut aussi être noté $\langle \alpha, \psi \rangle$

Fonctionnelle linéaire : une fonctionnelle est linéaire si

$$\alpha[c_1\psi_1 + c_2\psi_2] = c_1\alpha[\psi_1] + c_2\alpha[\psi_2]. \quad (2.7)$$

Espace-test : espace de fonctions-tests, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions infiniment dérivables et à support borné (nulle en dehors d'un intervalle borné).

Fonctionnelle continue : une fonctionnelle $\alpha : D \rightarrow \mathbb{C}$ est continue si pour toute suite de fonctions-tests ψ_n convergeant vers une limite ψ_∞ dans D , alors $\langle \alpha, \psi_n \rangle$ converge vers $\langle \alpha, \psi_\infty \rangle$.

Définition 2.2.2 (Distribution régulière).

Toute fonction réelle $\sigma(x)$ localement sommable (c'est-à-dire que $\int_I \sigma(x)dx$ est finie pour tout intervalle I fini) définit une distribution dite régulière :

$$\sigma[\psi(x)] = \langle \sigma, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x)\psi(x)dx, \quad \forall \psi \in D. \quad (2.8)$$

Définition 2.2.3 (Distribution singulière).

On appelle une distribution singulière une distribution qui à toute fonction ψ de D associe sa valeur en 0. C'est le cas de la distribution δ de Dirac : $\langle \delta, \psi \rangle = \psi(0)$, $\forall \psi \in D$. On définit de même la distribution δ centrée en a :

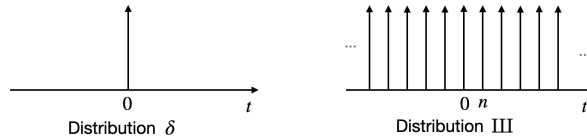
$$\langle \delta_a, \psi \rangle = \delta(x - a) = \psi(a), \quad \forall \psi \in D. \quad (2.9)$$

Exemple (Peigne de Dirac). *Le peigne de Dirac, noté III et appelé aussi “Shah” ou “Cha”, est défini ainsi :*

$$\langle \text{III}, \psi \rangle := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n),$$

c’est à dire que :

$$\text{III} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n \text{ ou } \text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n),$$



Exemple (Valeur principale de Cauchy). *La fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ ne définit pas une distribution régulière car elle n’est pas sommable au voisinage de 0. Mais on peut définir pour $\psi \in D$ l’intégrale :*

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x} dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx,$$

ce qui permet de définir la distribution $vp \frac{1}{x}$ par

$$\langle vp \frac{1}{x}, \psi \rangle = vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x} dx \right].$$

On peut généraliser cette notion :

$$\langle vp \frac{1}{x - x_0}, \psi \rangle = vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x - x_0} dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x - x_0| \geq \epsilon} \frac{\psi(x)}{x - x_0} dx.$$

2.2.2 Propriétés

On peut définir des opérations sur les distributions : translations, dilatations, dérivées...

Translation :

L’opération de translation T_a est défini tel que

$$(T_a \psi)(x) = \psi(x - a) = \psi_a(x). \quad (2.10)$$

Et on a donc :

$$\alpha_a[\psi] = T_a\alpha[\psi] = \alpha[T_{-a}\phi] \quad (2.11)$$

Exemple. Pour une distribution régulière $\alpha_a(x) = \alpha(x - a)$,

$$\alpha_a[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x-a)\psi(x)dx \underbrace{=}_{\xi=x-a} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\xi)\psi(\xi+a)d\xi = \alpha[\psi_a]. \quad (2.12)$$

Dilatation :

La dilatée de la distribution α est notée $\alpha(ax)$, et est définie par :

$$\langle \alpha(ax), \phi(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \alpha(x), \phi\left(\frac{x}{a}\right) \rangle. \quad (2.13)$$

Exemple. Pour une distribution régulière, en effet :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(ax)\psi(x)dx \underbrace{=}_{\xi=ax} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(ax)\psi\left(\frac{\xi}{a}\right)\frac{d\xi}{a}. \quad (2.14)$$

Dérivation :

La dérivée de la distribution α est notée α' , et est définie par :

$$\alpha'[\psi(x)] = -\alpha[\psi'(x)]. \quad (2.15)$$

Exemple (Distribution régulière). Pour une distribution régulière, en effet :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha'(x)\psi(x)dx \underbrace{=}_{\text{int. par part.}} = \underbrace{[\alpha(x)\psi(x)]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ car support borné}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\psi'(x)dx. \quad (2.16)$$

Exemple (Fonction de Heaviside).

On définit la fonction de Heaviside H :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Ce qui nous donne la distribution régulière :

$$H[\psi] = \int_0^{\infty} \psi(x) dx, \quad (2.18)$$

d'où :

$$H'[\psi] = -H[\psi'] \quad (2.19)$$

$$= - \int_0^{\infty} \psi'(x) dx \quad (2.20)$$

$$= - [\phi(x)]_0^{\infty} = \phi(0) - \underbrace{\phi(\infty)}_{=0 \text{ car support borné}} \quad (2.21)$$

$$= \delta[\phi]. \quad (2.22)$$

Et donc $H' = \delta$.

2.3 Convolution

2.3.1 Convolution de deux fonctions

Définition 2.3.1 (Convolution). La convolution de deux fonctions f et g est notée $f * g$ est est définie part :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi, \quad (2.23)$$

si f et g permettent cette opération. La convolution admet un nombre de propriétés, ci-dessous.

Commutativité : $f * g = g * f$

Démonstration.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \\ &\stackrel{\underbrace{X=x-\xi}}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} f(x - X) g(X) (-dX) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(X) f(x - X) dX \\ &= g * f(x) \end{aligned}$$

□

Associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 (f * g) * h &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x'') g(x' - x'') dx'' \right) h(x - x') dx' \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'') \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x' - x'') h(x - x') dx' \right) dx'' \\
 &\stackrel{\underbrace{X=x'-x''}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'') \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(X) h(x - x'' - X) dX \right) dx'' \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'') (g * h)(x - x'') dx'' \\
 &= f * (g * h)
 \end{aligned}$$

□

Intégration : $\int (f * g) = \int f \times \int g$

Démonstration. Soit $h(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, et f et g intégrables, alors

$$(h * f)(x) = (f * h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') dx' = \int f(x) dx = 1 * f,$$

d'où

$$\int (f * g) = 1 * f * g = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right)}_{\text{constante} \in \mathbb{R}} * g = \left(\int f dx \right) \times (1 * g) = \int f dx \times \int g dx.$$

□

Dérivation : $(f * g)' = f' * g = f * g'$

Démonstration.

$$(f * g)'(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g'(x - \xi) d\xi = f * g' \stackrel{\underbrace{\quad}}{\text{commutativité}} f' * g.$$

□

Exemple (Fonction rectangulaire).

On définit la fonction rectangulaire ainsi :

$$\text{rect}(x) = \Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Alors :

$$(\Pi * \Pi)(x) = \Lambda(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1, 0] \\ 1-x, & x \in [0, 1] \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Exemple (Convolution de Gaussiennes).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{a}} * \frac{1}{\sqrt{\pi b}} e^{-\frac{x^2}{b}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi ab}} \int e^{-\frac{t^2}{a}} e^{-\frac{(x-t)^2}{b}} dt \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} \int e^{-\frac{bt^2}{ab} + \frac{-a(x-t)^2}{ab}} dt \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} \int e^{-\frac{bt^2 - ax^2 - at^2 + 2axt}{ab}} dt \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{a}{ab}x^2} \int e^{-\frac{(a+b)t^2 + 2axt}{ab}} dt \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{a}{ab}x^2} \int e^{-\frac{(a+b)}{ab}(t^2 - \frac{2a}{a+b}xt)} dt
\end{aligned}$$

Prenons $X = t - \frac{a}{a+b}x$, donc $dt = dX$ et $t^2 - \frac{2atx}{a+b} = X^2 - \frac{(ax)^2}{(a+b)^2}$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{1}{b}x^2} \int e^{-\frac{(a+b)}{ab}(X^2 - \frac{(ax)^2}{(a+b)^2})} dX \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{1}{b}x^2 + \frac{a}{b(a+b)}x^2} \int e^{-\frac{(a+b)}{ab}X^2} dX
\end{aligned}$$

On exploite maintenant le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ pour avoir

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{a-b+a}{b(a+b)}x^2} \sqrt{\frac{\pi(ab)}{a+b}} \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{ab}} \sqrt{\frac{\pi(ab)}{a+b}} e^{-\frac{-b}{b(a+b)}x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi(a+b)}} e^{-\frac{x^2}{(a+b)}}
\end{aligned}$$

Donc on voit que la convolution de deux Gaussiennes est une Gaussienne !

2.3.2 Convolution de deux distributions

Définition 2.3.2 (Convolution de distributions). Soient deux distributions α et β . Leur convolution est définie ainsi :

$$\alpha * \beta[\psi] := \int \alpha * \beta \psi = \iint \alpha(x) \beta(y) \psi(x+y) dx dy. \quad (2.24)$$

Pour comprendre cette définition, on peut faire “comme si” α et β étaient

des fonctions...

$$\begin{aligned}
 \alpha * \beta[\psi] &= \int (\alpha * \beta)(x) \psi(x) dx = \iint \alpha(t) \beta(x-t) dt \psi(x) dx \\
 &= \int \alpha(t) \int \beta(x-t) \psi(x) dx dt \\
 &\stackrel{\substack{= \\ y=x-t}}{=} \int \alpha(t) \int \beta(y) \psi(y+t) dy dt \\
 &= \iint \alpha(x) \beta(y) \psi(x+y) dx dy
 \end{aligned}$$

Les convolutions de distributions ont les propriétés suivantes...

Commutativité : Ceci est évident et vient du fait que $\psi(x+y) = \psi(y+x)$.

Associativité : Ceci marche aussi :

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$$

mais il faut faire un peu attention, il faut que $\alpha * \beta$, $\alpha * \gamma$ et $\beta * \gamma$ existent aussi !

Intégration

Soit la distribution 1, définie par exemple par $1 = \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{a}}$. Comme pour les fonctions, on a :

$$1 * \alpha := \int \alpha \tag{2.25}$$

et donc

$$\int \alpha * \beta = \int \alpha \times \int \beta \tag{2.26}$$

Elément neutre

δ est l'élément neutre de la convolution des distributions : $\alpha * \delta = \alpha$.

Démonstration.

$$\alpha * \delta[\psi] = \int \alpha(x) \int \delta(y) \psi(x+y) dx dy \tag{2.27}$$

$$= \int \alpha(x) \psi(x) dx \tag{2.28}$$

$$= \alpha[\psi] \tag{2.29}$$

$$\tag{2.30}$$

□

On peut donc toujours écrire : $\int \alpha(t) \delta(x-t) dt = \alpha(x)$, que α soit une fonction ou une distribution.

On peut aussi généraliser : $\alpha * \delta(x-a) = \alpha * \delta_a = \alpha(x-a)$ (par un simple changement de variables).

Dérivation : $\alpha' = \alpha * \delta'$

Démonstration.

$$\alpha * \delta'[\psi] = \int \alpha(x) \int \delta'(y) \phi(x+y) dx dy \quad (2.31)$$

$$= \int \alpha(x) \int \delta(y) \phi'(x+y) dx dy \quad (2.32)$$

$$= - \int \alpha(x) \phi'(x) dx \quad (2.33)$$

$$= \int \alpha'(x) \phi(x) dx \quad (2.34)$$

$$= \alpha'[\phi] \quad (2.35)$$

$$(2.36)$$

□

On peut donc écrire $\int \alpha(t) \delta'(x-t) dt = \alpha'(x)$ que α soit une fonction ou une distribution.... et même si le produit de deux distributions n'existe pas ! Par exemple : δ^2 n'existe pas mais $\delta * \delta = \delta$.

Et, de même que pour les fonctions, on a :

$$(\alpha * \beta)' = \alpha * \beta * \delta' = \alpha * \beta' = \alpha' * \beta. \quad (2.37)$$

Chapitre 3

Transformées de Fourier

Les transformées de Fourier (TF) trouvent leurs origines dans la physique de la diffusion de la chaleur, et occupent toujours une place cardinale dans de nombreux domaines de la physique : l'optique, la spectroscopie, la physique quantique (les quantités reliées par le principe d'incertitude de Heisenberg peuvent être vues comme des TF les unes des autres), théorie de champs (quantique), le traitement du signal.

Il est donc très important, quel que soit votre préférence ou spécialisation en physique, d'être à l'aise avec les TF et leur propriétés !

3.1 Définition et propriétés

3.2 TF pour fonctions

Définition 3.2.1 (Transformée de Fourier).

Soit f une fonction réelle ou complexe, et x et ν deux variables réelles. Alors la TF de f , notée $\tilde{f}$, est une fonction en général complexe, définie par :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx. \quad (3.1)$$

On peut aussi définir la TF inverse (TFI) :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu. \quad (3.2)$$

D'autres conventions existent aussi. Par exemple on voit parfois :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \tilde{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), \quad (3.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (3.4)$$

Et les opticiens font même : $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+i\omega x} dx$

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 TF(e^{-\pi\alpha x^2}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\alpha x^2} e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\alpha(x^2 + \frac{2i\nu x}{\alpha})} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\alpha(x^2 + \frac{2i\nu x}{\alpha} + \frac{\nu^2}{\alpha^2} - \frac{\nu^2}{\alpha^2})} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\alpha(x + \frac{i\nu}{\alpha})^2 + \frac{\pi\nu^2}{\alpha}} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\alpha(x + \frac{i\nu}{\alpha})^2} e^{\frac{i\pi\nu^2}{\alpha}} dx \\
 &= e^{\frac{\pi\nu^2}{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\alpha(x + \frac{i\nu}{\alpha})^2} dx
 \end{aligned}$$

On peut démontrer en utilisant les outils du plan complexe que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+ib)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Et donc

$$TF(e^{-\pi\alpha x^2}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{\pi}{\alpha}\nu^2}$$

3.2.1 TF pour distributions

Si f et g sont des fonctions, on voit que :

$$\int \tilde{f}g = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)g(\nu)\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x} dx \right] g(\nu)d\nu \quad (3.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)e^{-2i\pi x\nu} d\nu \right] f(x)dx \quad (3.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\tilde{g}(x)dx = \int f\tilde{g} \quad (3.7)$$

Si on considère maintenant une distribution $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ et une fonction-test ϕ , alors on peut facilement voir que

$$\int \tilde{\alpha}\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{f}_n\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n\tilde{\phi} = \int \alpha\tilde{\phi},$$

d'où :

$$\tilde{\alpha}[\phi] = \alpha[\tilde{\phi}] \quad (3.8)$$

3.2.2 Propriétés

$\tilde{\delta} = 1$

En effet :

$$\tilde{\delta}[\phi] = \delta[\tilde{\phi}] = \widetilde{\phi(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)e^{-i\pi x \cdot 0} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = 1[\phi]$$

$\tilde{1} = \delta$

En effet :

$$\tilde{1}[\phi] = 1[\tilde{\phi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\tilde{\phi}(\nu)d\nu = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}(\nu)e^{\pi\nu 0}d\nu}_{\text{TF inverse évaluée en zéro !}} = \phi(0) = \delta[\phi]$$

On peut en tirer une conclusion importante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} dx = \delta(\nu). \quad (3.9)$$

$\int f\bar{g} = \int \tilde{f}\tilde{\bar{g}}$

Ici, la barre représente le conjugué complexe. Il is un peu lourd d'avoir un tilde et une barre au dessus d'un symbole, alors pour le reste de che chapitre, on représentera la conjugué complexe de z (normalement noté $\bar{z}$ par z^* . Et ainsi $\int f\bar{g} = \int \tilde{f}\tilde{\bar{g}}$.

Cette relation est appelée la propriété de Parseval-Plancherel.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int f\bar{g} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)e^{2i\pi\nu x} d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\mu)^* e^{-2i\pi\mu x} d\mu dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\tilde{g}(\mu)^* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi(\mu-\nu)x} d\nu d\mu dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\tilde{g}(\mu)^* \delta(\mu - \nu) d\nu d\mu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\tilde{g}(\nu)^* d\nu = \int \tilde{f}\tilde{\bar{g}} \end{aligned}$$

□

Un cas particulier est quand $f = g$, et donc $\int |f(x)|^2 dx = \int |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu$. On peut trouver une interpretation physique dans le traitement du signal : l'énergie d'un signal est indépendante de la représentation temporelle/fréquentielle.

3.2.3 Parenthèse : lien avec espaces vectoriels

On peut faire une parallèle avec ce qu'on sait des espaces vectoriels de dimension finie. Les propriétés ci-dessus expriment tout simplement le fait que $\{e^{2i\pi\nu t}\}$ peut être vu comme l'espace des fonctions, orthormé par le produit scalaire $\int f\bar{g} = \langle f, g \rangle$.

Propriété espace vectoriel	$\longrightarrow$	Propriété transformées de Fourier
(Orthogonalité des axes) $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$	$\longrightarrow$	$\langle e_\nu, e'_\nu \rangle = \int e^{2i\pi(\nu' - \nu)} = \delta(\nu - \nu')$
(Projection sur un axe) $v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i =$	$\longrightarrow$	$\langle f, e_\nu \rangle = \int f e^{-2i\pi\nu} dx = \tilde{f}(\nu)$
(Décomposition en coordonnées) $\vec{v} = \sum_i v_i \cdot \vec{e}_i =$	$\longrightarrow$	$f(x) = \int \langle f, e_\nu \rangle e^{2i\pi\nu} d\nu = \int \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu} d\nu$
(Produit Scalaire) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_i x_i y_i =$	$\longrightarrow$	$\int f g^* = \int \tilde{f} \tilde{g}^*$

3.2.4 Propriétés (bis)

$$\underline{\mathbf{TF}(f * g) = \widetilde{f * g} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f * g e^{-2i\pi\nu x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) e^{-2i\pi\nu x - \xi + \xi} dx d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x - \xi) e^{-2i\pi\nu(x - \xi)} dx}_{=\tilde{g}(\nu)} e^{-2i\pi\nu\xi} d\xi \\
&= \tilde{g}(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-2i\pi\nu\xi} d\xi \\
&= \tilde{f}(\nu) \tilde{g}(\nu)
\end{aligned}$$

□

$$\underline{\mathbf{TF}(f \cdot g) = \widetilde{f \cdot g} = \tilde{f} * \tilde{g}}$$

Démonstration à faire en TD !

Parité

La parité est préservée par ls TF. En effet si $f(x) = f(-x)$, alors

$$\widetilde{f(-\nu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{2i\pi x \nu} dx \underbrace{=}_{y=-x} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2i\pi y \nu} (-dy) = \tilde{f}(\nu)$$

Et de même on montre que si f est impaire, alors $\tilde{f}$ l'est aussi.

$$\underline{\mathbf{TF}(\mathbf{TF}(f(x))) = f(-x)}$$

Démonstration simple à faire en TD. Une conséquence est que si f est paire, $\mathbf{TF}(f) = \mathbf{TF}^{-1}(f)$. On a déjà vu un cas particulier : $\tilde{\tilde{\delta}} = \tilde{1} = \delta$.

Symétrie hermitienne

(On rappelle que pour un opérateur A , le conjugué hermitien $A^\dagger = A^{T*}$, où le T représente la transpose.) Pour une fonction $f(x) \in \mathbb{R} \iff f(x) = f(x)^*$ et donc

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^* e^{2i\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (f e^{2i\pi\nu x})^* dx = \tilde{f}(-\nu)^*. \quad (3.10)$$

Et d'où pour une fonction réelle,

$$\tilde{f}(-\nu) = \tilde{f}(\nu)^* \quad \text{et} \quad |\tilde{f}(-\nu)| = |\tilde{f}(\nu)| \quad (3.11)$$

Translation

$$\text{TF}(f(x-x_0)) = \text{TF}(f * \delta(x-x_0)) = \tilde{f}(\nu) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) e^{-2i\pi\nu x} dx = \tilde{f}(\nu) e^{-2i\pi\nu x_0}. \quad (3.12)$$

On aurait pu procéder plutôt par un changement de variables mais il est intéressant de souligner que la translation peut être vue comme une convolution !

Dilatation

$$\text{TF}(f(ax)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) e^{-2i\pi\nu x} dx \underset{X=ax}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) e^{-2i\pi \frac{x}{a} \nu} \frac{dX}{a} \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

Si $a < 0$, les limites d'intégration s'inversent. Mais si on écrit $a = -|a|$, on peut utiliser le signe $-$ pour toujours intégrer de $-\infty$ à ∞ . Du coup, que a soit positif ou négatif, on peut toujours écrire :

$$\text{TF}(f(ax)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) e^{-2i\pi \frac{x}{a} \nu} \frac{dX}{|a|} = \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{\nu}{a}\right). \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

Ou, également : $\text{TF}(f(\frac{x}{a})) = |a| \tilde{f}(a\nu)$.

On appelle $f(\frac{x}{a})$ la dilatée de f d'un facteur a . Quand on dilate une fonction elle se décompose forcément sur des fréquences plus basses.

III = III

On verra la démonstration en TD.

3.2.5 Dérivation

On peut décrire certaines propriétés des TF de fonctions dérivées... et mettre l'accent sur quelques cas particuliers.

$$\text{TF}(f') = 2i\pi\nu \tilde{f}(\nu), \quad (3.17)$$

et de manière générale :

$$\text{TF}(f^{(n)}) = (2i\pi\nu)^n \tilde{f}(\nu). \quad (3.18)$$

Pour démontrer ça, on peut simplement appliquer $\frac{d}{dx}$ à la formule de TF inverse.

On peut aussi voir la dérivation comme une convolution avec δ' , en effet :

$$f' = f * \delta'. \quad (3.19)$$

Démonstration.

$$f * \delta' = f' * \delta = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \delta(x-t) dt = f'(x).$$

Puisque $\delta(x-t) = 0$ sauf si $x-t=0$ soit $x=t$. □

Exemple ($\text{TF}(\delta')$ et $\text{TF}^{-1}(\delta')$). On montre que :

$$\text{TF}(\delta') = 2i\pi\nu. \quad (3.20)$$

Puisque d'une part on a $\text{TF}(f') = 2i\pi\nu \text{TF}(f)$ et d'autre part $\text{TF}(f') = \text{TF}(f * \delta') = \text{TF}(f) \cdot \text{TF}(\delta')$.

La TFI inverse en revanche donne :

$$\text{TF}^{-1}(\delta') = -2i\pi x. \quad (3.21)$$

La démonstration ici exploite la définition d'une dérivée de distribution $\langle \alpha', \phi \rangle = -\langle \alpha, \phi' \rangle$.

Exemple ($\text{TF}(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$). Puisque $\text{TF}^{-1}(\delta') = -2i\pi x$, on applique la TF pour avoir :

$$\text{TF}(x) = \frac{\delta'(\nu)}{-2i\pi} \quad (3.22)$$

On peut en suite montrer par induction que plus généralement :

$$\text{TF}(x^n) = \frac{\delta^{(n)}(\nu)}{(-2i\pi)^n}. \quad (3.23)$$

On a déjà montré le cas de $n=1$ (et $n=0$ se réduit à $\tilde{1} = \delta$), et si le cas n est vrai alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{x^{n+1}} &= \widetilde{x \cdot x^n} = \widetilde{x} * \widetilde{x^n} = \left(\frac{\delta'(\nu)}{-2i\pi} \right) * \left(\frac{\delta^{(n)}(\nu)}{(-2i\pi)^n} \right) \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^{n+1}} \cdot (\delta' * \delta^{(n)}) \underset{\alpha' = \alpha * \delta'}{=} \frac{\delta^{(n+1)}(\nu)}{(-2i\pi)^{n+1}} \end{aligned}$$

Et donc la propriété est vraie pour tout n .

3.2.6 Autocorrelation et fonctions périodiques

L'autocorrelation représente la corrélation d'une fonction (e.g. un signal) avec une copie d'elle-même transposée dans le temps. L'autocorrelation est un outil qui s'utilise par exemple pour identifier des fonctions périodiques !

Définition 3.2.2 (Autocorrelation). L'autocorrelation $A_f(\tau)$ d'une fonction f est définie par :

$$A_f(\tau) = f(t) * f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-\tau)dt. \quad (3.24)$$

Cette définition implique que $A_f(\tau) = A_f(-\tau)$ et $\widetilde{A_f}(\tau) = \widetilde{f}(-\tau) \cdot \widetilde{f}(-\tau) = |\widetilde{f}|^2$ si f est réelle.

L'autocorrelation nous donnera la valeur de τ (le décalage) où la fonction "se répète" : donc identifier la période si on a affaire à une fonction périodique.

Définition 3.2.3 (Fonction périodique). Si $f(t) = f(t+T)$, $\forall t$ alors cette fonction est périodique avec période T .

Les fonctions périodiques peuvent s'écrire (série de Fourier) :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (3.25)$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$.

On peut donc définir une TF "au sens des distributions" :

$$\widetilde{f}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega t} e^{-2\pi i \nu t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\nu - \frac{n}{T}).$$

Exemple. Puisque $TF^{-1}(\delta') = -2i\pi x$, on applique la TF pour avoir :

$$TF(x) = \frac{\delta'(\nu)}{-2i\pi} \quad (3.26)$$

3.2.7 Quelques TFs célèbres

- (Gaussienne) $\widetilde{e^{-a\pi x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi}{a}\nu^2}$. $\widetilde{e^{-a\pi x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi}{a}\nu^2}$.

- (Lorentzienne) $\widetilde{e^{-\mu|x|}} = \frac{2\mu}{\mu^2 + 4\pi^2\nu^2}$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \widetilde{e^{-\mu|x|}} &= \int_{-\infty}^0 e^{\mu x} e^{-2i\pi\nu x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-\mu x} e^{-2i\pi\nu x} dx \\ &= \left[\frac{e^{(\mu-2i\pi\nu)x}}{\mu-2i\pi\nu} \right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{e^{-(\mu+2i\pi\nu)x}}{\mu+2i\pi\nu} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\mu-2i\pi\nu} + \frac{1}{\mu+2i\pi\nu} = \frac{2\mu}{\mu^2 + 4\pi^2\nu^2} \end{aligned}$$

□

- (Fonction rectangulaire / porte)

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi(x)} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu x} dx = \left[\frac{-e^{-2i\pi\nu x}}{2i\pi\nu} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2i\pi\nu} (e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}) = \text{sinc}(\pi\nu),\end{aligned}$$

avec $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ le “sinus cardinal”.

- (Fonction triangulaire $\Lambda = \Pi * \Pi$)

$$\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Pi * \Pi} = \widetilde{\Pi}^2 = \text{sinc}^2(\pi\nu).$$

3.3 TF à N dimensions

3.3.1 Définition

Si f est une fonction réelle à N dimensions, on a $f(\vec{r}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, alors on écrit la TF ainsi

$$\widetilde{f}(\vec{\nu}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}) e^{-2i\pi\vec{\nu} \cdot \vec{r}} d\vec{r},$$

où $d\vec{r} = dx dy dz$.

On trouve aussi d'autres conventions, comme :

$$\hat{f}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}) e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r}.$$

La TF à N -dimensions maintient la séparabilité. En Effet, si f est séparable $f(\vec{k}) = \prod_i^N f_i(r_i)$, alors :

$$\widetilde{f}(\vec{\nu}) = \int \prod_j^N f_j(r_j) \prod_j^N e^{-2i\pi\nu_j r_j} \prod_j^N dr_j = \prod_j^N \widetilde{f}_j(\nu_j).$$

C'est le cas par exemple des Gaussiennes.

On peut aussi définir un δ à N dimensions :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\vec{\nu} \cdot \vec{r}} d\vec{r} = \delta(\vec{\nu})$$

Ou encore :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} = \delta\left(\frac{\vec{k}}{2\pi}\right) = \prod_i^N \delta\left(\frac{k_i}{2\pi}\right) = (2\pi)^N \delta(\vec{k})$$